

DISIPADORES DE COLUMNA LÍQUIDA PARA CONTROLAR LA RESPUESTA ESTRUCTURAL DE EDIFICIOS BAJO ACCIONES SÍSMICAS

Luis Rozas T.¹ y Rubén Boroschek K.²

- 1 Magister Ingeniería Sismorresistente, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, Chile. lroz@ing.uchile.cl
2. Profesor Asociado Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, Chile. rborosch@ing.uchile.cl

RESUMEN

En este artículo se desarrolla un análisis teórico del comportamiento de una estructura con un disipador de columna líquida sintonizada sujeta a acciones de tipo sísmico. Tres tipos de acciones sísmicas idealizadas son consideradas para el análisis. En un comienzo la aceleración de base se representa como una acción sinusoidal, luego la aceleración de base se supone como un proceso estocástico tipo ruido blanco, y finalmente como un proceso estocástico tipo ruido blanco filtrado. Para cada una de estas aceleraciones de base se proponen expresiones para determinar los parámetros óptimos de diseño, con objeto de minimizar el desplazamiento de la estructura a controlar. Las expresiones de los parámetros óptimos de diseño se presentan en función de la razón de masas entre el dispositivo y la estructura controlada, la razón de amortiguamiento crítico de la estructura controlada, y el factor de forma del dispositivo. Finalmente se propone un procedimiento de diseño para tratar estructuras de varios grados de libertad. En este caso, la estructura principal se puede representar, para propósitos de diseño, como una estructura equivalente de un grado de libertad. Con esta consideración, los parámetros óptimos para sistemas de un grado de libertad pueden ser utilizados para diseñar el dispositivo.

SUMMARY

In this article a theoretical analysis of a structure with tuned liquid column damper subject to seismic excitation is performed. Three kinds of idealized seismic excitation types are considered. First base acceleration is supposed to be represented like a sinusoidal action, then the base acceleration is considered like a white noise random process, and finally as a filtered white noise random process. For each one of these cases, expressions for finding the optimal design parameters of the device are proposed in terms of minimizing the displacement of the controlled structure. These optimal parameters are expressed as functions of the mass ratio of the device to the controlled structure, the critical damping ratio of the controlled structure, and the shape factor of the device. Finally a design procedure is proposed for dealing with multidegree of freedom structures. In this case the main structure can be represented, for design purposes, like an equivalent single degree of freedom structure. From this point, optimal design parameters can be used for design the device.

INTRODUCCIÓN

El rápido crecimiento de las áreas urbanas, junto con el desarrollo de modernas técnicas de construcción, han tenido como resultado un incremento en el número de edificios altos. Esta clase de estructuras, que poseen como denominador común un bajo amortiguamiento y gran flexibilidad, pueden presentar problemas asociados con vibraciones molestas las cuales pueden ocasionar no solo problemas a sus ocupantes sino que también a su contenido y elementos no estructurales.

En respuesta a estas nuevas exigencias de diseño, que buscan no solo asegurar la integridad de las estructuras frente a acciones externas de severa intensidad, sino que también la protección de su contenido y componentes no estructurales, se han desarrollado sistemas de control que incrementan la seguridad, y mejoran el comportamiento de las construcciones.

Dentro de estos sistemas de control estructural destacan los estanques de columna líquida sintonizada. Esta clase de dispositivos consisten básicamente en un estanque lleno de líquido en forma de U, el cual posibilita la oscilación del fluido contenido en el. A su vez una restricción ubicada típicamente en el centro del dispositivo, permite controlar la disipación de energía en la vibración del líquido. Los disipadores de columna líquida sintonizada poseen el atractivo de su bajo costo y sus mínimos requerimientos de mantención. Por otra parte, debido a la ausencia de fricción mecánica, el dispositivo es efectivo incluso para vibraciones muy pequeñas, convirtiéndolo en una alternativa eficaz para el control de vibraciones ambientales.

Ecuaciones de movimiento estructura-disipador de columna líquida

Para lograr que el dispositivo cumpla con el objetivo de reducir la respuesta de la estructura en la cual se ubica, se deben determinar los parámetros óptimos de diseño. Estos parámetros corresponden a la frecuencia de oscilación, y razón de amortiguamiento crítico óptimos de diseño. Para ello primero se debe caracterizar la respuesta dinámica del sistema estructura-disipador. Consideramos en un principio el sistema mostrado en la figura 1, la cual representa una estructura de un grado de libertad más un disipador de columna líquida sintonizada.

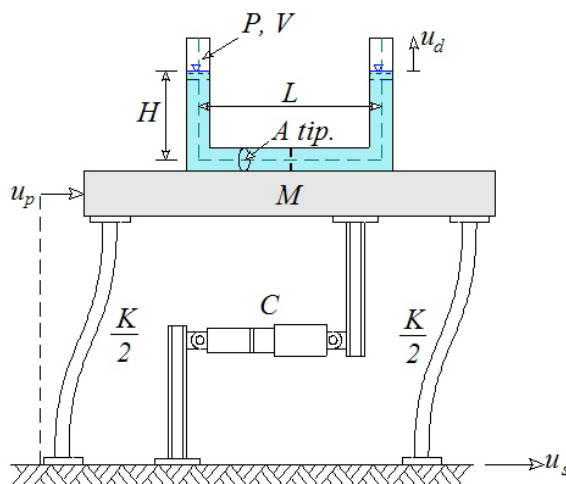


Figura 1: Estructura de un grado de libertad más disipador de columna líquida sintonizada

Por medio de métodos de energía, mas específicamente a partir de las ecuaciones de movimiento de Lagrange, las ecuaciones de movimiento del sistema pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} m_f \ddot{u}_d + \frac{1}{2} \rho_f \eta A \dot{u}_d |\dot{u}_d| + k_d u_d &= -m_h (\ddot{u}_p + \ddot{u}_s) \\ M_T \ddot{u}_p + C \dot{u}_p + K u_p &= -M_T \ddot{u}_s - m_h \ddot{u}_d + \frac{1}{2} \rho_f \eta A \dot{u}_d |\dot{u}_d| \end{aligned} \right\} 1$$

en donde m_h corresponde a la masa de líquido contenido dentro de la sección horizontal del disipador, la cual puede relacionarse a partir de la masa total de líquido m_f y el factor de forma del dispositivo α , como $m_h = \alpha \cdot m_f$, M_T es la masa total del sistema incluyendo la masa de la estructura principal, la masa de líquido y la masa del estanque m_u , y el término η da cuenta de las pérdidas del flujo de líquido en el angostamiento central, el cambio de dirección del flujo de líquido en los codos del dispositivo, y el rozamiento en contra de sus paredes internas. Como podemos notar, en la ecuación 1 las fuerzas disipativas asociadas al desplazamiento de la superficie libre de líquido u_d , son del tipo no lineal. Para fines de diseño estas fuerzas pueden ser escritas de forma lineal equivalente, tal como se detallará más adelante, dependiendo del tipo de acción basal a la cual es sometido el sistema.

Parámetros óptimos de diseño para aceleración de base determinística monofrecuencial.

Supondremos en un inicio que la aceleración de base puede representarse como una acción determinística monofrecuencial, es decir se puede describir de la forma $u_s(t) = \bar{u}_s e^{i\Omega t}$. Podemos por tanto escribir la respuesta del sistema en régimen permanente como se indica a continuación

$$\bar{u}_p = \frac{M_T \bar{\ddot{u}}_s}{K} H_p e^{i\delta_p} \quad 2$$

$$\bar{u}_d = \frac{m_f \bar{\ddot{u}}_s}{k_d} H_d e^{i\delta_d} \quad 3$$

En donde el término H_p corresponde al factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento de la estructura primaria y a la aceleración de base, y H_d al factor de amplificación dinámica entre el desplazamiento de la superficie libre de líquido y a la aceleración de base. En las ecuaciones 4 y 5 se detallan ambos factores en función de la razón entre la frecuencia de vibrar del dispositivo y la estructura primaria f , la razón entre la masa de líquido contenida en la sección horizontal del dispositivo y la masa de la estructura principal $\hat{\mu}$, la razón de amortiguamiento crítico de la estructura principal ξ_p , la razón de amortiguamiento crítico del disipador ξ_d , y el factor de forma del dispositivo α .

$$H_p = \frac{\sqrt{[\rho^2(1-\alpha\hat{\mu})-f^2]^2 + 4\rho^2 f^2 \xi_d^2 (1+\hat{\mu})^2}}{\sqrt{[(1-\rho^2)(f^2-\rho^2)-4\xi_p \xi_d f \rho^2 - \rho^4 \alpha \hat{\mu}]^2 - 4[\xi_p \rho (f^2-\rho^2) + \xi_d f \rho [1-\rho^2(1+\hat{\mu})]]^2}} \quad 4$$

$$H_d = \frac{\alpha f^2 \sqrt{1+4\rho^2 \xi_p^2}}{\sqrt{[(1-\rho^2)(f^2-\rho^2)-4\xi_p \xi_d f \rho^2 - \rho^4 \alpha \hat{\mu}]^2 - 4[\xi_p \rho (f^2-\rho^2) + \xi_d f \rho [1-\rho^2(1+\hat{\mu})]]^2}} \quad 5$$

Para obtener los parámetros óptimos de diseño del dispositivo utilizamos como criterio la reducción del máximo valor que adopta el factor de amplificación dinámica H_p . En otras palabras se deben determinar el valor de la frecuencia de oscilación del dispositivo ω_d , y su razón de amortiguamiento crítico ξ_d , tales que minimizan la respuesta en frecuencia de la estructura a controlar. Si el amortiguamiento crítico de la estructura a controlar es despreciable, los parámetros óptimos de diseño del dispositivo pueden obtenerse por medio del criterio de Den Hartog, [2]. Este criterio se utiliza en la presente investigación para determinar los parámetros óptimos de diseño de un disipador de columna líquida sintonizada. Los parámetros óptimos que se obtienen por medio del uso de este criterio se muestran en las ecuaciones 6 y 7

$$f|_{OPT} = \sqrt{\frac{2-\hat{\mu}-3\alpha\hat{\mu}}{2(1+\hat{\mu})}} \quad 6$$

$$\xi_d|_{OPT} = \frac{1}{5} \sqrt{\left(\frac{19 \cdot \alpha + 0.05}{2}\right) \cdot \hat{\mu}} \quad 7$$

La ecuación 7 nos entrega la razón de amortiguamiento crítico óptimo que debe poseer el dispositivo, bajo el supuesto que la fuerzas disipativas asociada a la oscilación de líquido pueden ser escritas en términos lineales equivalentes. Estas fuerzas dependen, cuando el régimen de flujo es de tipo turbulento, del cuadrado de la velocidad de la superficie libre de líquido. Cuando la aceleración de base es de tipo monofrecuencial, es posible determinar la constante de amortiguamiento equivalente para la oscilación de la superficie libre de líquido, igualando la energía disipada en un ciclo de oscilación de la fuerza lineal equivalente con la fuerza no lineal [1]. En este caso la constante de amortiguamiento lineal equivalente se escribe como sigue.

$$c_d = \left(\frac{4}{3\pi}\right) \rho_f \eta A \Omega H_d|_{OPT} \quad 8$$

en donde ρ_f es la densidad del líquido, y $H_d|_{OPT}$ corresponde al valor del factor de amplificación dinámica del desplazamiento de la superficie libre de líquido para las condiciones optimas de diseño. Conocidos por tanto el valor de $\xi_d|_{OPT}$ y $H_d|_{OPT}$, es posible calcular el valor de η con el cual posteriormente se pueden determinar las dimensiones del angostamiento central.

Las ecuaciones 6 y 7 permiten pues diseñar el dispositivo de manera tal de minimizar el máximo valor que adopta el factor de amplificación dinámica H_p . Lo anterior puede ser confirmado en la figura 2. Cuando la frecuencia de oscilación del líquido y su amortiguamiento han sido optimizadas,

entonces el factor H_p adopta la forma de la curva roja, curva cuyo máximo es el menor de los posibles para un par dado de valores de $\hat{\mu}$ y α .

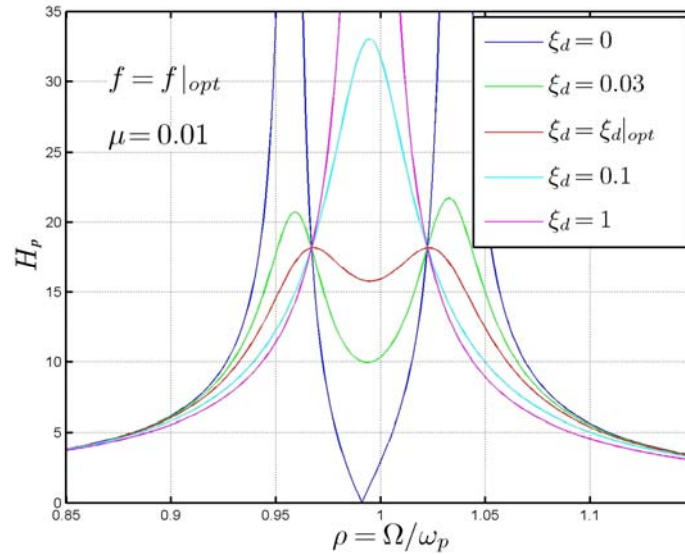


Figura 2: Variación de H_p con respecto a la razón entre la frecuencia de la aceleración de base y la frecuencia natural de la estructura primaria, para $f|_{OPT}$ y distintos valores de ξ_d . En este caso la razón entre la masa de líquido y la estructura primaria es de 0.01 y el factor de forma es igual a 0.6.

Cuando el amortiguamiento de la estructura primaria es considerable, entonces el criterio de Den Hartog no puede ser aplicado. En estos casos se debe llevar a cabo un proceso de optimización numérica directa, buscando los parámetros f y ξ_d tales que minimizan el máximo valor de H_p . Para facilitar el diseño del dispositivo, se proponen en esta investigación expresiones analíticas que ajustan los valores de los parámetros óptimos $f|_{OPT}$ y $\xi_d|_{OPT}$, determinados a partir del análisis numérico. Las expresiones correspondientes se pueden consultar en la referencia [1].

Parámetros óptimos de diseño para aceleración de base aleatoria

Existe un gran número de situaciones en los cuales no es posible representar de manera explícita las acciones externas que actúan sobre una estructura. Este es el caso de las excitaciones externas de naturaleza aleatoria. Para analizar la respuesta del sistema frente a este tipo de acciones, y posteriormente optimizar el diseño del disipador, supondremos en un comienzo que la aceleración de base se puede caracterizar como un proceso estocástico tipo ruido blanco, cuya función de densidad espectral es constante e igual \ddot{u}_{so} . Nos interesa por tanto determinar las características que debe poseer el dispositivo de manera tal de minimizar el desplazamiento de la estructura primaria en términos estadísticos, es decir minimizar su esperanza media cuadrática $E\{u_p^2\}$.

En la figura 3 se muestra el valor que adopta el factor $\bar{E}\{u_p^2\}$, correspondiente al valor de la esperanza media cuadrática del desplazamiento de la estructura, normalizado respecto del valor de la esperanza media cuadrática del desplazamiento de la estructura sin disipador, en función de los

parámetros f y ξ_d . Resulta claro que existe un par de valores que minimizan el factor $\bar{E}\{u_p^2\}$. Cuando el amortiguamiento de la estructura primaria es despreciable se obtienen las expresiones 9 y 10 para los parámetros óptimos de diseño. Si bien es cierto en este caso se han derivado expresiones cerradas para los parámetros óptimos, su gran extensión hace poco práctico su uso. Como alternativa se proponen en esta investigación las ecuaciones 9 y 10 determinadas por medio de ajustes numéricos.

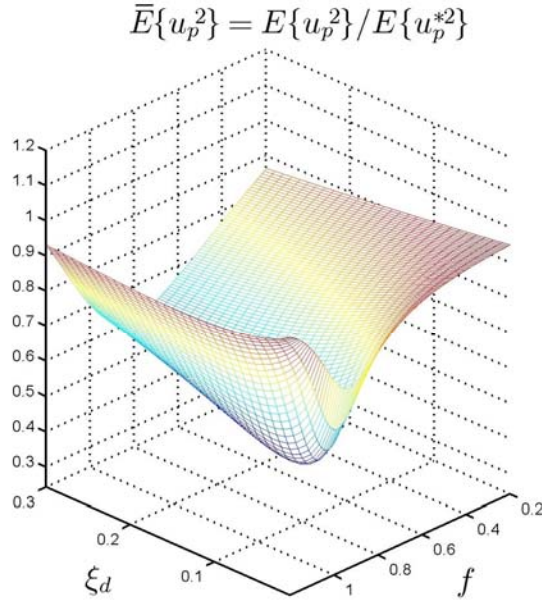


Figura 3: Valor medio cuadrático normalizado, en función de f y ξ_d , para $\hat{\mu} = 0.03$, $\xi_p = 0.03$ y $\alpha = 0.75$. En este caso los valores óptimos de diseño para el dispositivo corresponden a: $f|_{OPT} = 0.945$ y $\xi_d|_{OPT} = 7.46\%$.

$$f|_{OPT} = 1 - (0.704 \cdot \alpha + 0.745) \cdot \hat{\mu} \quad 9$$

$$\xi_d|_{OPT} = \sqrt{(0.226 \cdot \alpha^2 - 0.455 \cdot \alpha + 0.242) \cdot \hat{\mu}^2 + 0.25 \cdot \alpha \cdot \hat{\mu}} \quad 10$$

Conocido el valor de $\xi_d|_{OPT}$ se puede determinar el valor del coeficiente de pérdidas η . En este caso la constante de amortiguamiento lineal equivalente se determina mediante linealización estocástica, asumiendo que la respuesta de la superficie libre de líquido puede ser caracterizada como un proceso Gaussiano, hipótesis válida para sistemas con no linealidades débiles. Por medio de esta formulación podemos escribir:

$$c_d = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho_f A \eta \cdot \sigma_{\dot{u}_d} \Big|_{OPT}$$

en donde $\sigma_{\dot{u}_d} \Big|_{OPT}$ corresponde a la desviación estándar de la velocidad de la superficie libre de líquido evaluada en condiciones optimas de diseño. Al igual que en el caso de aceleración basal monofrecuencial, cuando el amortiguamiento de la estructura es considerable, se pueden calibrar expresiones numéricas que ajustan los valores de los parámetros óptimos obtenidos a partir de la minimización del valor de $\bar{E}\{u_p^2\}$. Las expresiones resultantes son demasiado extensas para detallarse aquí, sin embargo pueden ser consultadas en la referencia [1].

La situación analizada siguiente corresponde al caso en que la aceleración de base puede caracterizarse como un proceso estocástico tipo ruido blanco filtrado. Específicamente nos interesa analizar el comportamiento del sistema cuando el mismo se encuentra ubicado sobre un estrato de suelo. Si suponemos que el suelo actúa como un oscilador de un grado de libertad, el mismo funcionará como filtro para las acciones sísmicas que provienen de la roca basal, las cuales pueden representarse a su vez como un proceso estocástico tipo ruido blanco. De esta forma la estructura en cuestión es excitada en su base por un proceso estocástico tipo ruido blanco filtrado.

La determinación de parámetros óptimos de diseño del dispositivo, para condiciones de excitación basal tipo ruido blanco filtrado dependerá además de la frecuencia de vibrar del estrato de suelo, como de su amortiguamiento. La gran cantidad de combinaciones posibles que pueden presentarse hace que la proposición de formulas para los parámetros óptimos sea demasiado extensa y poco practica. Se estudia en cambio la variación de los parámetros óptimos con respecto a aquellos determinados para condiciones de excitación basal tipo ruido blanco, para un valor fijo del amortiguamiento del estrato de suelo. Si denominamos los parámetros óptimos correspondientes a excitación basal tipo ruido blanco filtrado como: $f \Big|_{OPT}^{RBF}$ y $\xi_d \Big|_{OPT}^{RBF}$, y los parámetros óptimos correspondientes a excitación basal tipo ruido blanco como: $f \Big|_{OPT}^{RB}$ y $\xi_d \Big|_{OPT}^{RB}$, podemos analizar la relación entre ambos por medio de los siguientes factores

$$N_f = \frac{f \Big|_{OPT}^{RBF}}{f \Big|_{OPT}^{RB}} \tag{12}$$

$$N_{\xi_d} = \frac{\xi_d \Big|_{OPT}^{RBF}}{\xi_d \Big|_{OPT}^{RB}} \tag{13}$$

Como ejemplo se presenta en la figura 4 el factor N_f en función del cuociente entre la frecuencia natural de vibrar de la estructura principal y del estrato de suelo ρ_s , para valores de la razón de masas y amortiguamientos críticos de la estructura principal variables entre 0.5 % y 10%. Se considera a su vez un valor para la razón de amortiguamiento crítico del estrato de suelo $\xi_s = 10\%$ y un factor de forma $\alpha = 0.6$. Como puede notarse, a medida que ρ_s se hace cero los valores de N_f

se aproximan a la unidad. En estos casos la función de densidad espectral del ruido blanco filtrado actúa como un proceso estocástico de banda ancha, con una variación muy suave, en el entorno de la frecuencia natural de vibrar de la estructura primaria. Como consecuencia el ruido blanco filtrado actúa esencialmente como un ruido blanco. Por otra parte, se puede concluir que a medida que el amortiguamiento crítico de la estructura primaria se incrementa, los valores de N_f y N_{ξ_d} se alejan cada vez mas de la unidad. En estos casos la función de transferencia de la estructura posee valores distribuidos sobre un mayor rango de frecuencias. Esto hace que la respuesta de la estructura se vea influenciada a su vez por un mayor rango de frecuencias de la función de densidad espectral de la excitación externa. Como consecuencia de ello, la idealización del movimiento de base como un proceso tipo ruido blanco ya no es adecuada, ya que sobre este mayor rango de frecuencias la función de densidad espectral del mismo posee una variación mas marcada. Como consecuencia se puede concluir que en general los parámetros óptimos de diseño, para ruido blanco y ruido blanco filtrado son idénticos.

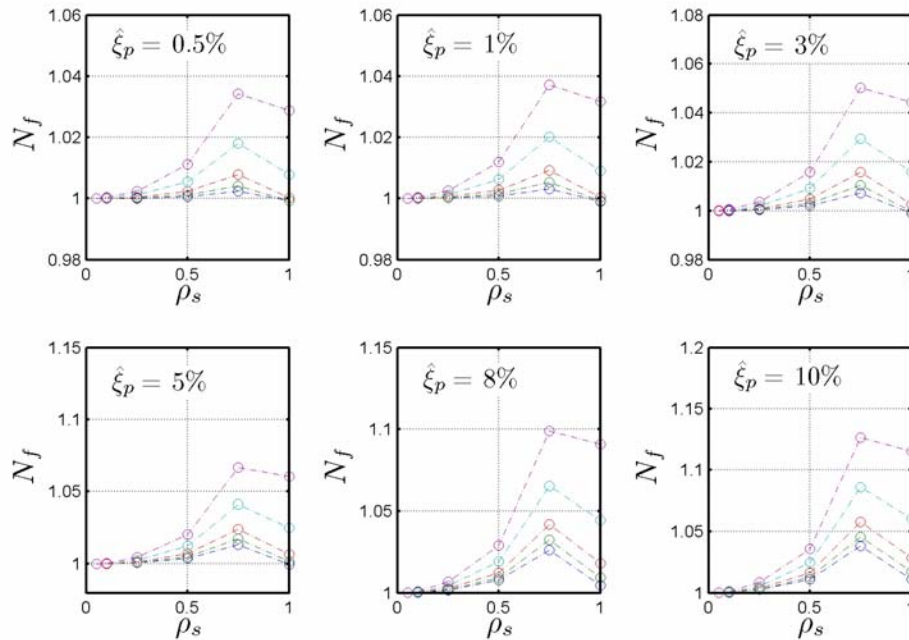


Figura 4: Variación del factor N_f para distintos valores de ρ_s , $\hat{\xi}_p$ y para $\xi_s = 0.1$, $\alpha = 0.6$

Sistemas de varios grados de libertad con disipador de columna líquida

Los análisis descritos para estructuras de un grado de libertad con dispositivo pueden extenderse para tratar sistemas de varios grados de libertad con disipador de columna líquida. Las ecuaciones de movimiento pueden derivarse a partir de las ecuaciones de Lagrange en forma matricial. Las N primeras ecuaciones de movimiento, correspondientes a los grados de libertad del sistema principal se escriben como se indica a continuación:

$$[M_p]\{\ddot{U}_p\} + [C_p]\{\dot{U}_p\} + [K_p]\{U_p\} = -[M_p]\{r\} \cdot \ddot{u}_s - \dots \dots - [(m_f + m_u)(\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) - c_d \dot{u}_d + m_h \ddot{u}_d] \cdot L \quad 14$$

En donde $[M_p]$, $[C_p]$ y $[K_p]$ corresponden a las matrices de masa amortiguamiento y rigidez del sistema primario respectivamente, a su vez el movimiento de la estructura esta descrito mediante el vector de grados de libertad $\{U_p\}$. Además, $\{r\}$ es el vector de influencia para el desplazamiento de suelo, en donde la componente del vector de influencia en el grado de libertad en donde se ubica el dispositivo u_i , es igual a la unidad, es decir $r_i = 1$, las restantes componentes pueden poseer valores arbitrarios.

El movimiento del líquido dentro del dispositivo, esto es la ecuación asociada al grado de libertad u_d , adopta la siguiente forma:

$$m_f \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + k_d u_d = -m_h (\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) \quad 15$$

Para el grupo de N ecuaciones definidas por la expresión hacemos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\{U_p\} = [\Phi]\{q\} \quad 16$$

En donde la matriz $[\Phi]$ corresponde a la matriz de formas modales del sistema primario sin el dispositivo instalado. Reemplazando la expresión anterior en la ecuación 3. y luego de premultiplicar $[\Phi]^T$ se obtiene:

$$[M_p]\{\ddot{q}\} + [C_p]\{\dot{q}\} + [K_p]\{q\} = -[\Phi]^T [M_p]\{r\}\{\ddot{u}_s\} - \dots \dots - [\Phi]^T [(m_f + m_u)(\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) - c_d \dot{u}_d + m_h \ddot{u}_d] \cdot L \quad 17$$

Donde $[M_p]$, $[C_p]$ y $[K_p]$ corresponden a las matrices modales de masa, amortiguamiento, y rigidez del sistema primario respectivamente. Asumiendo que la matriz $[C_p]$ es del tipo clásica, obtenemos un sistema de N ecuaciones desacopladas. Teniendo en cuenta lo anterior podemos escribir la j -ésima ecuación del sistema 17 de la siguiente forma:

$$m_j \ddot{q}_j + c_j \dot{q}_j + k_j q_j = - \sum_{k=1}^N \phi_{k,j} M_k \ddot{u}_s - \phi_{i,j} [(m_f + m_u)(\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) - c_d \dot{u}_d + m_h \ddot{u}_d] \quad 18$$

Si sabemos que el j -ésimo modo es aquel con mayor participación en la respuesta de la estructura, y por ende aquel que se desea atenuar, podemos aproximar la respuesta de u_i , correspondiente al grado de libertad en donde se ubica el disipador como $u_i \approx \phi_{i,j} q_j$. A partir de esta aproximación podemos reducir el sistema de $N+1$ ecuaciones de movimiento del sistema al siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$m_f \ddot{u}_d + c_d \dot{u}_d + k_d u_d = -m_h (\ddot{u}_i + \ddot{u}_s) \quad 19$$

$$\left(\mathbf{m}_j / \phi_{i,j}^2 + m_f + m_u \right) \ddot{u}_i + \left(\mathbf{c}_j / \phi_{i,j}^2 \right) \dot{u}_i + \left(\mathbf{k}_j / \phi_{i,j}^2 \right) u_i = -\beta_j \left(\mathbf{m}_j / \phi_{i,j}^2 + m_f + m_u \right) \ddot{u}_s + c_d \dot{u}_d - m_h \ddot{u}_d \quad 20$$

Comparando las ecuaciones anteriores con el sistema de ecuaciones 1 obtenidas para el caso en que la estructura primaria posee solo un grado de libertad, podemos notar que las mismas difieren solo en el término β_j . Podemos pues determinar los parámetros óptimos de diseño del dispositivo, al reducir la estructura principal de N grados de libertad a una estructura de un grado de libertad equivalente de masa $\mathbf{m}_j / \phi_{i,j}^2$, amortiguamiento $\mathbf{c}_j / \phi_{i,j}^2$ y rigidez $\mathbf{k}_j / \phi_{i,j}^2$.

REFERENCIAS

1. Luis Rozas, (2009), "Reducción de la Respuesta Estructural por medio del uso de Disipadores de Masa Sintonizada y Disipadores de Columna Líquida Sintonizada" Tesis Magister Universidad de Chile. Profesor Guía: Ruben Boroschek
2. Den Hartog J.P. (1956). "Mechanical Vibrations", McGraw-Hill.
3. Jong-Shyong Wu, Mang Hsieh (2002), "Study on the dynamic characteristic of a U-type tuned liquid damper", Ocean Engineering 29, pp. 689–709.
4. T. Balendra, C. M. Wang, G. Rakesh (1999), "Effectiveness of TLCD on various structural systems", Engineering Structures 21, pp. 291–305.
5. Jong-Cheng Wu. (2005), "Experimental Calibration and Head Loss Prediction of Tuned Liquid Column Damper", Tamkang Journal of Science and Engineering, Vol. 8, No 4, pp. 319-325.
6. Jong-Cheng Wu, Ming-Hsiang Shihb, Yuh-Yi Lina, Ying-Chang Shenc (2005), "Design guidelines for tuned liquid column damper for structures responding to wind", Engineering Structures 27, pp. 1893–1905