

## EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO SÍSMICO DE ESTRUCTURAS BASADO EN LA EVOLUCIÓN DE INDICES DE DAÑO

P. Mata A<sup>1</sup>, S. Oller<sup>1</sup>, A.H. Barbat<sup>1</sup> y R. Boroscsek<sup>2</sup>

<sup>1</sup>: *Universidad Politécnica de Cataluña, UPC*

<sup>2</sup>: *Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Civil.*

### RESUMEN

En la caracterización del comportamiento de estructuras sometidas a terremotos fuertes se emplean parámetros y curvas que resumen a nivel global una gran cantidad de información respecto a como se distribuye el daño, la disipación de energía y las demandas de ductilidad en los elementos estructurales. Entre los parámetros más empleados están las curvas de capacidad, el nivel de ductilidad global, la sobre resistencia, los desplazamientos máximos esperados y el amortiguamiento. Todos ellos son empleados como factores de corrección de los espectros de respuesta empleados para análisis lineales o en la reducción de los esfuerzos elásticos durante el diseño. A pesar de que estos métodos constituyen una aproximación, en general deberían proporcionar un nivel de protección que evita el colapso de las estructuras. Por lo tanto, la fiabilidad que le se pueda asignar a los parámetros y curvas globales dependerá de los métodos empleados en su obtención, los que involucran métodos de análisis no lineales estáticos o dinámicos. En este trabajo se presenta una formulación para el análisis dinámico de estructuras de barras que considera no linealidad constitutiva y geométrica. Se emplea un modelo de fibras para elementos curvos. Adicionalmente, se presenta un índice de daño que a nivel de punto material basado en la relación entre las tensiones existentes y las elásticas. El daño a nivel local que se puede integrar en una parte o el total de la estructura para generar curvas de evolución temporal del daño o la demanda de ductilidad. Se presentan varios ejemplos donde se aplica la formulación propuesta al estudio comparativo de la respuesta estática y dinámica estructuras de hormigón armado.

### SUMMARY

The characterization of the behavior of structures subjected to strong earthquakes, requires defining parameters and curves which summarize, at global level, a great amount of information regarding to the damage's distribution, energy dissipation and the demands of ductility in the structural elements. Among the most used parameters are the capacity curves, the global ductility level, the strength, the maximum expected displacement and the damping. All of them are used for producing correction factors for the design's spectrum used in linear analyses or for constructing reduction factors of the elastic forces in the design phase. In general, these methods, even when are approximated, would have to provide a protection level able to avoid collapses. Therefore, the reliability that can be assigned to these parameters will depend on the methods used in obtaining them, which frequently involves static or dynamic nonlinear analyses. In this work a formulation for the dynamic analysis of beam structures that considers constitutive and geometric nonlinearity is presented. A fiber model is used for curved elements. Additionally, a damage index defined at material point level is presented. This index is based on the relation between the existing tensions and their elastic counterparts. The damage at local level can be integrated in a part or of the structure for obtaining curves of the temporal evolution of the global damage or the ductility demand. Several examples are presented for validating proposed formulation for the determination of damage indices deduced from the static and dynamic response of reinforced concrete structures.

## Introducción

El análisis no lineal de estructuras formadas por vigas ha capturado el interés de muchos investigadores durante las últimas décadas. Muchas contribuciones se han centrado en la formulación de modelos geoméricamente exactos en deformación finita, pero considerando que las relaciones constitutivas lineales y elásticas en términos de fuerzas y de momentos seccionales. Por el contrario, la no linealidad constitutiva se ha tratado por medio de los modelos concentrados y distribuidos, ambos formulados, en la mayoría de los casos, para deformación infinitesimal. Solo se han desarrollado algunas formulaciones considerando no linealidad geométrica y constitutiva, pero se han centrado principalmente en plasticidad. Una de las formulaciones exactas más empleada es la de Simo (Simo 1985) que generalizan al caso dinámico tridimensional la formulación de Reissner (1972) para considerar cortante y elongación finitos. Posteriormente, Simo y Vu-Quoc (1986, 1988) desarrollaron la implementación numérica del modelo en el contexto del método de los elementos finitos (FE) para los casos estáticos y dinámicos.

Los trabajos sobre inelasticidad han progresado principalmente por dos medio de dos aproximaciones: modelos concentrados y distribuidos. Los modelos concentrados consideran elementos estructurales elásticos equipados con rótulas plásticas en los extremos. En el caso de los modelos distribuidos, la no linealidad se evalúa en un número fijo de secciones transversales a lo largo del eje de la viga, permitiendo para obtener un comportamiento no lineal distribuido a lo largo de los elementos. Estas secciones se dividen en un número de puntos de control que corresponden a las fibras dirigidas a lo largo del eje de la viga. Por lo tanto, esta aproximación se conoce como modelos de fibras (Shao y otros, 2005) y permite el predecir de manera más realista las fuerzas y momentos en la sección transversal.

Ambas aproximaciones están afectadas por el fenómeno de la localización de deformaciones cuando los materiales presentan ablandamiento y la respuesta estructural puede volverse dependiente de la malla si no se hacen correcciones apropiadas (Hanganu y otros, 2002). Barbat y otros. (1997) regularizan la energía disipada a nivel de punto material, limitando su valor a la energía específica de fractura del material (Oliver y otros, 1990). Este método se asegura de que la respuesta estructural del conjunto siga siendo objetiva, pero la longitud de la zona en donde ocurre el ablandamiento continua siendo dependiente de la malla.

Una de las limitaciones más comunes de las formulaciones distribuidas está dada por el hecho de que la inelasticidad está definida para la componente de la tensión que actúa en la dirección normal a la cara de la sección transversal y, por lo tanto, los componentes de corte se tratan elásticamente. Este supuesto no permite para simular el acoplamiento no lineal entre las diversas componentes de la tensión a nivel constitutivo, proporcionando modelos donde los cortantes y los momentos de torsión de la sección se transmiten elásticamente entre los elementos (Davenne y otros, 2003). Los trabajos que consideran no linealidad constitutiva y geométrica son escasos y se han restringido principalmente a la plasticidad (Saje y otros, 1998).

## Modelo de vigas en deformación finita

En este trabajo la formulación de Simo y Vu Quoc para vigas en deformación finita se amplía considerando una configuración de referencia (intermedia) curva. La viga de referencia recta se define simplemente por medio de recta fija parametrizada en términos de

la coordenada de longitud de arco. Las secciones de la viga se describen por medio de un sistema de coordenadas local contenido en el plano de la sección. La viga curva de referencia se define por medio de una curva espacial fija  $\phi_0$ . Además, cada punto en esta curva tiene unido un sistema de referencia local ortogonal,  $\{t_\beta\}$  ( $\beta=2,3$ ), construido por medio de un tensor de orientación  $\Lambda_0$  contenido en  $SO(3)$  (la variedad rotacional). Una sección de la viga,  $\mathcal{A}$ , se define considerando este sistema coordinado local. Los planos de las secciones transversales son normales al vector tangente a la curva de referencia.

El movimiento deforma la línea de centroides de la viga curva de referencia por medio de la adición de un vector de translación y la orientación del sistema local rota simultáneamente junto con la sección transversal de la viga. En general, el vector normal a la sección transversal no coincide con la tangente a la curva. El vector de posición (actual) de cualquier punto material en la viga,  $x$ , es

$$x = \phi + \sum_{\beta=2}^3 \xi_\beta \Lambda t_\beta \quad (1)$$

donde  $\phi$  es la curva de centroides actualizada y  $\Lambda$  es el tensor actual de la rotación.

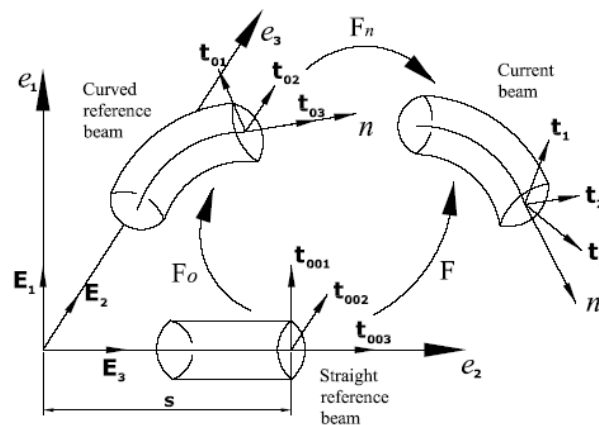


Figura 1. Descripción configuracional de la viga.

La Eq. (1) implica que la configuración actual de la viga está determinada totalmente por el par  $(\phi, \Lambda)$ . Por otro lado, el gradiente de deformación se define como el gradiente de la función  $\phi$  y determina las medidas de deformación en cualquier punto material de la sección transversal de la viga. Los gradientes de la deformación de configuración de referencia curva y de la configuración actualizada con respecto a la configuración de referencia recta son designados por  $F_0$  y  $F$ , respectivamente. El gradiente de deformación  $F_n := FF_0^{-1}$  es responsable del desarrollo de deformaciones y se puede expresar como

$$F_n = FF_0^{-1} = \frac{1}{|F_0|} [\hat{\varphi}_{,S} - \Lambda_n \hat{\varphi}_{0,S} + \sum_{\beta=2}^3 \tilde{\omega}_n \xi_\beta \hat{t}_\beta] \otimes \hat{t}_{01} + \Lambda_n \quad (2)$$

donde  $(\cdot)_{,S}$  denota la derivada parcial con respecto a el parámetro  $S$ ,  $\omega_n$  y  $\Lambda_n$  son los tensores de curvatura y rotación relativos a la configuración de referencia curva, respectivamente. La representación material de  $F_n$  se obtiene como  $F_n^m = \Lambda^T F_n \Lambda_0$ .

Es posible construir el tensor de deformación  $\epsilon_n = F_n - \Lambda_n$ , conjugado al primer tensor de tensión de Piola Kirchhoff (FPK),  $P$ , referido la viga curva de referencia.  $P_j$  es el FPK vector de tensión de que actúa en la cara deformada en la viga actual correspondiente a la normal  $t_{0j}$  en la configuración de referencia curva. El vector de deformación que actúa en cada punto de la sección transversal de la viga actual es  $\epsilon_n = \epsilon_n t_{01}$ . La forma espacial de los vectores de fuerza y momento resultantes,  $n$  y  $m$  se pueden estimar a partir del vector  $P_1$  como

$$\hat{n}(S) = \int_A \hat{P}_1 dA; \quad \hat{m}(S) = \int_A (\hat{x} - \hat{\varphi}) \times \hat{P}_1 dA \quad (3)$$

De acuerdo con los desarrollos de Antman (1991), la forma clásica de las ecuaciones de movimiento de las vigas de Cosserat para el caso estático son

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{,S} + \mathcal{N} &= A_{\rho 0} \ddot{\hat{\varphi}} + \underbrace{\hat{\alpha}_n \times \mathbf{S}_{\rho 0} + \hat{v}_n \times \hat{v}_n \times \mathbf{S}_{\rho 0}}_{D_1} \\ \mathbf{m}_{,S} + \hat{\varphi}_{,S} \times \mathbf{n} + \mathcal{M} &= \underbrace{\mathbf{S}_{\rho 0} \ddot{\hat{\varphi}}}_{D_2} + \mathcal{I}_{\rho 0} \hat{\alpha}_n + \hat{v}_n \times \mathcal{I}_{\rho 0} \hat{v}_n \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $N$  y  $M$  son las fuerzas y momentos externos por unidad de largo en configuración de referencia.  $A_{\rho 0}$ ,  $\mathbf{S}_{\rho 0}$  y  $\mathcal{I}_{\rho 0}$  son la densidad total, el primer momento de inercia y el segundo momento de inercia por unidad de longitud de la viga curva de referencia, respectivamente. Los términos  $D_1$  y  $D_2$  aparecen debido a la curvatura inicial y a una distribución no homogénea de materiales; su contribución a la dinámica se puede agregar a las fuerzas y a los momentos externos. Considerando una variación cinemáticamente admisible,  $h=(\delta\phi, \delta\theta)$ , del par  $(\phi, \Lambda)$ , tomando el producto interno con Eq. (4) e integrando sobre la longitud de la viga curva de referencia, se obtiene el funcional no lineal  $\mathbf{G}(X, h)$  correspondiente al principio de los trabajos virtuales con la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x, h) &= \int_L \left[ (\delta\hat{\varphi}_{,S} - \delta\hat{\theta} \times \hat{\varphi}_{,S}) \cdot \mathbf{n} + \delta\hat{\theta} \cdot \mathbf{m} \right] dS \\ &+ \int_L \left\{ \delta\hat{\varphi} \cdot A_{\rho 0} \ddot{\hat{\varphi}} + \delta\hat{\theta} \cdot \left[ \mathcal{I}_{\rho 0} \hat{\alpha}_n + \hat{v}_n \times (\mathcal{I}_{\rho 0} \hat{v}_n) \right] \right\} dS \\ &- \int_L (\delta\hat{\varphi} \cdot \mathcal{N} + \delta\hat{\theta} \cdot \mathcal{M}) dS - \left[ (\delta\hat{\varphi} \cdot \mathbf{n}) \Big|_0^L + (\delta\hat{\theta} \cdot \mathbf{m}) \Big|_0^L \right] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

### Modelos constitutivos

Con frecuencia, las características materiales han sido asumidas elásticas y lineales (Ibrahimbegovic, 1995) y, por lo tanto, las ecuaciones constitutivas reducidas pueden ser muy simples. Estudios realistas implican considerar no linealidades constitutivas así como los efectos geométricos para representar apropiadamente la resistencia, ductilidad y rigidez de las estructuras (Elnashai y Mwafi, 2002). Los puntos materiales en las secciones transversales de la viga se consideran formados por un material compuesto que corresponde a una mezcla homogénea de diversos componentes simples, cada uno de ellos con su propia ley constitutiva (ver Figura 2). El comportamiento del compuesto se obtiene por medio de la teoría de mezclas simple.

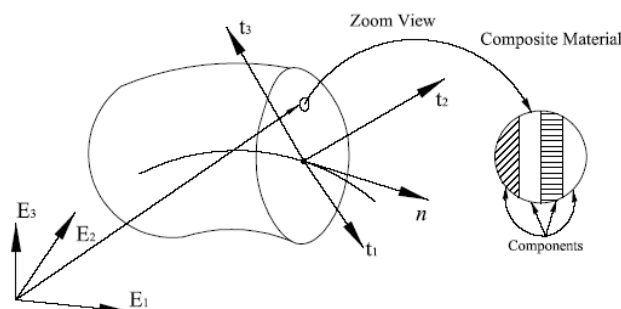


Figura 2. Sección transversal mostrando el material compuesto en cada punto material.

Dos clases de modelos constitutivos para materiales simples se utilizan en este trabajo: los modelos del daño y plasticidad. Corresponden a los casos particulares de formulaciones más generales, (Barbat y otros. 1997), pero formulados de una tal manera que es posible incluirlos en la formulación de vigas previamente descrita.

## Modelo de daño

El comportamiento de la mayoría de los materiales degradantes se debe al hecho de que ocurre micro-fisuración debido a la pérdida de cohesión entre partículas, no obstante una gran cantidad de otros procesos también está implicada (Hanganu y otros. 2002). La teoría de daño empleada en este trabajo se basa en una función daño especial que distingue la respuesta mecánica para los componentes del vector de tensión en tracción ó compresión. El progreso del daño se basa en la evolución de un parámetro escalar, que afecta todos los componentes del tensor constitutivo elástico y en este sentido; constituye un modelo isotópico de daño (Oliver y otros. 1990).

**Ecuación constitutiva.** Para problemas térmicamente estables, considerando el cumplimiento de la desigualdad del Clausius-Plank y aplicando el principio del Coleman, tenemos la siguiente relación constitutiva para el vector de la tensión que actúan en cada punto de la sección transversal de la viga:

$$\hat{\mathbf{P}}_1^m = (1-d)\mathbf{C}^{me}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n = \mathbf{C}^{ms}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n = (1-d)\hat{\mathbf{P}}_{01}^m \quad (6)$$

donde  $\mathbf{C}^{me}=\text{Diag}[E_0, G_0, G_0]$  es el tensor constitutivo elástico con  $E_0$  y  $G_0$  el modulo de Young y el modulo elástico de corte; y  $\mathbf{C}^{ms}=(1-d)\mathbf{C}^{me}$  es el tensor constitutivo secante. Eq. (6) muestra que el vector de tensión es obtenido a partir de su contraparte elástica multiplicando por el factor  $(1-d)$ .

**Criterio de daño.** El criterio umbral de daño,  $\mathbf{F}$ , se define en función de la densidad de energía libre elástica no dañada y se escribe en los términos de las componentes de las tensiones principales no dañadas (Hanganu y otros, 2002; Oller y Barbat, 2006),

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{P}^m - f_c &= [1 + n(r-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\mathbf{P}_{p0i}^m)^2} - f_c \leq 0 \\ r &= \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{P}_{p0i}^m \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\mathbf{P}_{p0i}^m|}; \quad (\Psi_{t,c}^0)_L = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle \pm \mathbf{P}_{p0i}^m \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_{ni}}{2\rho_0}; \quad \Psi_L^0 = (\Psi_t^0)_L + (\Psi_c^0)_L \\ n &= \frac{f_c}{f_t}; \quad f_t = (2\rho\Psi_t^0 E_0)_L^{\frac{1}{2}}; \quad f_c = (2\rho\Psi_c^0 E_0)_L^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $\mathcal{P}^m$  es la tensión equivalente y los parámetros  $r$  y  $n$  son dados en función de las resistencias a tracción y compresión  $f_c$  y  $f_t$  y las partes de la energía libre desarrolladas en procesos de tracción y compresión,  $(\Psi_{0t})_L$  y  $(\Psi_{0c})_L$ , respectivamente. Una expresión equivalente a la de la Eq. (7) es la siguiente:

$$\bar{\mathcal{F}} = G(\mathcal{P}^m) - G(f_c) \quad (8)$$

donde  $G(\mathcal{P}^m)$  es una función escalar monotónica definida de tal forma de que la energía disipada por el material en un punto de integración es limitada a la energía de fractura del material (Oliver *et.al.*, 1990).

**Evolution of the damage variable.** La regla de evolución para la variable interna de daño  $d$  es

$$\dot{d} = \frac{dG}{d\mathcal{P}^m} \dot{\mathcal{P}}^m \quad (9)$$

La condición de umbral de daño y la condición de consistencia se definen en manera análoga al caso de plasticidad. Finalmente, las condiciones de Kuhn-Thucker se utilizan para derivar las relaciones de carga y descarga. La siguiente expresión es utilizada para la función  $G$  (Oliver *et.al.*, 1990):

$$\mathcal{G}(\chi) = 1 - \frac{\bar{\mathcal{G}}(\chi)}{\chi} = 1 - \frac{\chi^*}{\chi} e^{\kappa(1-\frac{\chi}{\chi^*})} \quad (10)$$

donde el término  $G(\chi)$  da el valor inicial de la tensión de daño para cierto valor del parámetro escalar  $\chi$ . El parámetro  $\kappa$  de Eq. (10) es calibrado para obtener una cantidad de energía disipada igual a la energía de fractura del material.

**Tensor constitutivo tangente.** Después de varias manipulaciones algebraicas (Hanganu *et.al.*, 2002), es posible obtener el tensor constitutivo tangente  $\mathbf{C}^{mt}$  como

$$\delta \hat{P}_1^m = \mathbf{C}^{mt} \delta \hat{\mathcal{E}}_n = \left[ (1-d)\mathbf{I} - \frac{dG}{dP} \hat{P}_{01}^m \otimes \frac{\partial P}{\partial \hat{P}_{01}^m} \right] \mathbf{C}^{me} \delta \hat{\mathcal{E}}_n \quad (11)$$

### Materiales plásticos

En caso de materiales que pueden experimentar deformaciones irreversibles se asume un modelo de plasticidad.

**Ecuación constitutiva.** Empleando la desigualdad de Clausius–Plank y el principio del Coleman (Lubliner, 1985 del CP; Malvern, 1969), la ecuación constitutiva secante toma la siguiente forma:

$$\hat{P}_1^m = \rho_0 \frac{\partial \Psi(\hat{\mathcal{E}}_n^e, k_p)}{\partial \hat{\mathcal{E}}_n^e} = \mathbf{C}^{ms} (\hat{\mathcal{E}}_n - \hat{\mathcal{E}}_n^P) = \mathbf{C}^{me} \hat{\mathcal{E}}_n^e \quad (12)$$

donde la descripción del tensor constitutivo secante  $\mathbf{C}^{ms}$  coincide con la elástica y el super índice ‘P’ se usa para denotar deformaciones plásticas.

**Funciones umbrales y de potencial plástico.** Ambas funciones, de umbral de fluencia,  $F_p$ , y de potencial plástico,  $G_p$ , son formuladas en términos de el vector de tensiones y la variable interna de daño plástico  $k_p$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p(\hat{P}_1^m, k_p) &= \mathcal{P}_p(\hat{P}_1^m) - f_p(\hat{P}_1^m, k_p) = 0 \\ \mathcal{G}_p(\hat{P}_1^m, k_p) &= K \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $P_p$  es la tensión equivalente que se compara con la función de endurecimiento  $f_p$  que depende de la variable de daño plástico  $k_p$  y del estado de tensiones, y  $K$  es un valor constante.

De acuerdo con la regla de evolución supuesta para la variable de daño plástico,  $k_p$ , es posible considerar materiales con endurecimiento isotrópico, sin embargo, en este trabajo  $k_p$  constituye una medida de la energía disipada y es útil para describir materiales que presentan ablandamiento (Lubliner *et.al.*, 1989) como

$$\begin{aligned} g_f^P &= \frac{G_f^P}{l_c} = \int_{t=0}^{\infty} \hat{P}_1^m \cdot \dot{\mathcal{E}}_n^P dt \\ 0 &\leq \left[ k_p = \frac{1}{g_f^P} \int_{t=0}^t \hat{P}_1^m \cdot \dot{\mathcal{E}}_n^P dt \right] \leq 1 \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $G_{Pf}$  es la energía de fractura plástica del material en tracción  $l_c$  es el largo del dominio fracturado.

**Leyes de evolución para las variables internas.** Las reglas de flujo para las deformaciones plásticas y para  $k_p$  son definidas de acuerdo a

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_n^P &= \lambda \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \hat{P}_1^m} \\ \dot{k}_p &= \lambda \hat{Q}(\hat{P}_1^m, k_p, G_f^P) \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \hat{P}_1^m} = \hat{Q}(\hat{P}_1^m, k_p, G_f^P) \cdot \dot{\mathcal{E}}_n^P \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de consistencia plástica y  $\hat{Q}$  es el siguiente vector de endurecimiento:

$$\dot{k}_p = \left[ \frac{r}{g_f^P} + \frac{1-r}{g_c^P} \right] \hat{P}_1^m \cdot \dot{\hat{\mathcal{E}}}_n^P = \hat{Q} \cdot \dot{\hat{\mathcal{E}}}_n^P \quad (16)$$

donde  $n$  y  $r$  son definidos de manera análoga al modelo de daño. Las condiciones de carga y descarga se derivan de las relaciones de Kuhn-Thucker formuladas para problemas con restricciones unilaterales. La variación temporal del parámetro de consistencia plástica tiene la siguiente expresión:

$$\dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \hat{P}_1^m} \cdot (\mathcal{C}^{me} \dot{\hat{\mathcal{E}}}_n)}{\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \hat{P}_1^m} \cdot (\mathcal{C}^{me} \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \hat{P}_1^m}) - \frac{\partial f_p}{\partial k_p} \hat{Q} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \hat{P}_1^m} \right\}} \quad (17)$$

Tensor constitutivo tangente. La forma material del tensor constitutivo tangente se calcula tomando la derivada temporal de la ecuación constitutiva, considerando las reglas de flujos y reemplazando el parámetro de consistencia plástica, luego de varias manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\delta \hat{P}_1^m = \left[ \mathcal{C}^{me} - \frac{(\mathcal{C}^{me} \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \hat{P}_1^m}) \otimes (\mathcal{C}^{me} \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \hat{P}_1^m})}{\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \hat{P}_1^m} \cdot (\mathcal{C}^{me} \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \hat{P}_1^m}) - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial k_p} \hat{Q} \cdot (\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \hat{P}_1^m})}_{\Phi_p}} \right] \delta \hat{\mathcal{E}}_n = \mathcal{C}^{mt} \delta \hat{\mathcal{E}}_n \quad (18)$$

### Mixing theory for composites

Cada punto material de la viga se trata como material compuesto según la teoría de mezclas que considera los siguientes supuestos: (i) Cada uno compuesto tiene un número finito de componentes simples. (ii) Cada componente participa según su participación volumétrica. (iii) Todos los componentes están sometidos al mismo campo de deformación. El supuesto (i) implica que los diversos componentes que coexisten en un punto genérico están sujetos a la ecuación de cierre siguiente:

$$\hat{\mathcal{E}}_n \equiv (\hat{\mathcal{E}}_n)_1 = \dots = (\hat{\mathcal{E}}_n)_q = \dots = (\hat{\mathcal{E}}_n)_N \quad (19)$$

Lo que impone la compatibilidad entre componentes. En este caso la ecuación constitutiva para el material compuesto tiene la siguiente forma:

$$\hat{P}_1^m \equiv \bar{\rho}_0 \frac{\partial \bar{\Psi}(\hat{\mathcal{E}}_n, \alpha_p)}{\partial \hat{\mathcal{E}}_n} = \sum_{q=1}^N k_q(\rho_0)_q \frac{\partial \Psi_q(\hat{\mathcal{E}}_n, \alpha_p)}{\partial \hat{\mathcal{E}}_n} = \sum_q k_q (\hat{P}_1^m)_q \quad (20)$$

donde el vector de tensión se obtiene como la suma ponderada según la fracción volumétrica, de las tensiones de los componentes.

La ecuación constitutiva secante, el tensores constitutivo de secante y tangente,  $\mathcal{C}^{ms}$   $\mathcal{C}^{mt}$ , del compuesto se obtiene de manera análoga como (Oller y otros, 1996)

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}^{ms} &\equiv \sum_{q=1}^N k_q (\mathcal{C}^{ms})_q \rightarrow \hat{P}_1^m = \bar{\mathcal{C}}^{ms} (\hat{\mathcal{E}}_n - \hat{\mathcal{E}}_n^P) \\ \hat{\mathcal{E}}_n^P &= \sum_{q=1}^N k_q (\hat{\mathcal{E}}_n^P)_q \\ \delta \hat{P}_1^m &= \bar{\mathcal{C}}^{mt} \delta \hat{\mathcal{E}}_n = \sum_{q=1}^N k_q (\mathcal{C}^{mt})_q \delta \hat{\mathcal{E}}_n \end{aligned} \quad (21)$$

El comportamiento mecánico de algunos materiales compuestos se basa en un componente principal que hace de matriz y que se refuerza con las fibras orientadas, como por ejemplo, materiales poliméricos reforzados con fibras vidrio o carbón, ó incluso el hormigón armado, donde las barras de refuerzo y los estribos se pueden ver como fibras de

acero orientadas. La regla de mezclas proporciona un marco apropiado para simular estas clases de compuestos.

### Implementación numérica

Para obtener un procedimiento numérico de resolución del tipo Newton–Rapson, se requiere llevar a cabo la linealización de la forma débil de la Eq. (5), la que se puede escribir como  $\mathcal{L}[\mathbf{G}(\phi, \mathbf{\Lambda}, h)] = \mathbf{G}(\phi, \mathbf{\Lambda}, h) + D\mathbf{G}(\phi, \mathbf{\Lambda}, h) \cdot p$  donde  $\mathcal{L}[\mathbf{G}]$  es la parte lineal del funcional  $\mathbf{G}(\phi, \mathbf{\Lambda}, h)$  en la configuración definida por  $(\phi, \mathbf{\Lambda})$  y  $p \equiv (\Delta\phi, \Delta\theta)$  es una variación admisible. El término  $\mathbf{G}(\phi, \mathbf{\Lambda}, h)$  proporciona la fuerza desequilibrada y el diferencial  $D\mathbf{G}(\phi, \mathbf{\Lambda}, h) \cdot p$ , la rigidez tangencial, que se calcula como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{G}(\hat{x}, h)] = & \underbrace{\mathbf{G}_{\text{int}}(\hat{x}, h) + \mathbf{G}_{\text{ext}}(\hat{x}, h) + \mathbf{G}_{\text{ine}}(\hat{x}, h)}_{\mathbf{G}(\hat{x}, h)} + \\ & \underbrace{\left[ D\mathbf{G}_{\text{int}}(\hat{x}, h) + D\mathbf{G}_{\text{ext}}(\hat{x}, h) + D\mathbf{G}_{\text{ine}}(\hat{x}, h) \right]}_{D\mathbf{G}(\hat{x}, h)} \cdot h \end{aligned} \quad (22)$$

La implementación numérica en un código de elementos finitos de la componente externa, interna e inercial de  $\mathbf{G}$  en la Eq. (22) sigue procedimientos estándar y puede ser consultado en la referencia (Ibrahimbegovic y Mikdad, 2000).

Finalmente, se llega a la siguiente expresión para el problema linealizado:

$$\mathcal{L}[\mathbf{G}(\hat{x}, h)] = \mathbf{G}(\hat{x}, h) + [\mathbf{K}]_M + [\mathbf{K}]_G + [\mathbf{K}]_V + [\mathbf{K}]_P + [\mathbf{M}] + [\mathbf{C}_{\text{gyr}}] + [\mathbf{K}_{\text{cent}}] \quad (23)$$

donde  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}_{\text{gyr}}]$  y  $[\mathbf{K}_{\text{cent}}]$  corresponden a las matrices de inercia de masa, giroscópica y centrífuga,  $[\mathbf{K}]_M$ ,  $[\mathbf{K}]_G$ ,  $[\mathbf{K}]_V$  y  $[\mathbf{K}]_P$  son las matrices de rigidez debido a la no linealidad material, geométrica, viscosa y debido a la carga no conservativa en el problema discreto (Simo, 1986, Mata y otros, 2007).

### Análisis de la sección transversal

El análisis de sección transversal se realiza expandiendo cada punto de integración en el eje de la viga en un sistema de puntos de la integración situados en cada fibra en la sección transversal. Para realizar esta operación, la sección transversal de la viga está dividida en una rejilla de cuadriláteros, cada uno de ellos correspondiendo a una fibra orientada a lo largo del eje de la viga (ver Figura 3). El valor del nivel medio de la tensión que existe en cada cuadrilátero se calcula integrando las ecuaciones constitutivas de los materiales del compuesto asociado al cuadrilátero aplicando la regla de mezclas. La geometría de cada cuadrilátero se describe por medio de funciones bidimensionales normalizadas y es posible especificar varios puntos de la integración para estimar más exactamente el valor de una función definida en el cuadrilátero. En el caso del valor medio de la forma material del vector de la tensión que actúa en un cuadrilátero tenemos

$$\hat{P}_1^m = \frac{1}{A_c} \int \hat{P}_1^m dA_c = \frac{1}{A_c} \sum_{p=1}^{N_p} \sum_{q=1}^{N_q} \hat{P}_1^m(y_p, z_q) J_{pq} W_{pq} \quad (24)$$

donde la  $A_c$  es el área del cuadrilátero,  $N_p$  y  $N_q$  es el número de los puntos de la integración en las dos direcciones de la geometría normalizada del cuadrilátero  $P^m(y_p, z_q)$  es el valor del vector de la tensión que existe en un punto de la integración con los coordenadas  $(y_p, z_q)$  con respecto al eje de la viga que se obtiene usando los leyes constitutivas y la regla de mezclas,  $J_{pq}$  es el Jacobiano de la transformación entre los coordenadas normalizados y los coordenadas locales y  $W_{pq}$  son los factores de la regla de integración. Los coeficientes de los tensores constitutivos de la tangentes se pueden estimar



de una manera análoga. Finalmente, las fuerzas y los momentos a nivel de sección se obtiene por medio de la forma discreta de Ecuaciones (3).

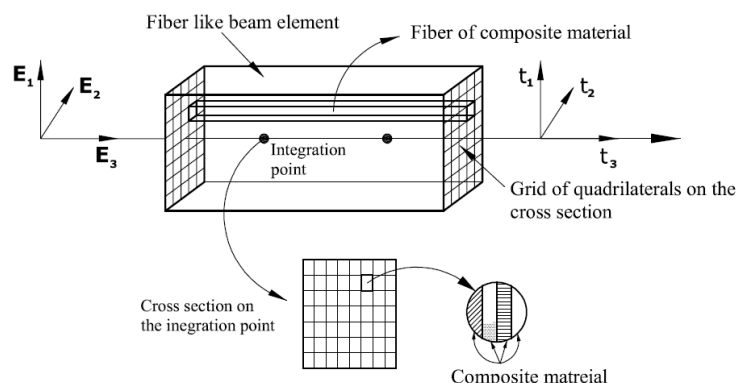


Figura 3. Modelo de fibras de la viga.

Desde el punto de vista numérico dados un paso de carga y una iteración, se requieren dos lazos adicionales de la integración. El Primero es un lazo sobre los cuadriláteros (o equivalente las fibras), en este lazo, se obtienen de las fuerzas y momentos a nivel de sección. El segundo lazo recorre cada material simple asociado al compuesto de un cuadrilátero. En este caso, el vector de la tensión  $P^m_{i,1}$ , y la relación constitutiva tangente se calculan para cada componente según sus ecuaciones constitutivas específicas; el comportamiento del compuesto se recupera con la ayuda de la teoría de mezclas.

El comportamiento seccional se obtiene como la suma ponderada de la contribución de las fibras. La no linealidad constitutiva, tal como degradación o plasticidad, se captura por medio de las leyes constitutivas de los materiales simples en cada cuadrilátero. La relación no lineal entre fuerzas y momentos de la sección y desplazamientos y rotaciones se obtiene por medio de la integración. Secciones de forma general se pueden analizar por medio del método propuesto, sin embargo, dos limitaciones tienen que ser consideradas: (i) Los problemas mecánicos que implican deformaciones grandes fuera del plano de la sección no pueden ser reproducidos apropiadamente. (ii) El equilibrio mecánico a nivel del elemento no implica equilibrio mecánico entre fibras en el rango inelástico debido al hecho de que el actual modelo de la viga soluciona las ecuaciones constitutivas para cada fibra independientemente.

## Índices de daño

La estimación de los índices del daño representativos de la capacidad remanente de una estructura de resistir carga se ha convertido en una cuestión clave en las aproximaciones basadas en el desempeño que se emplean actualmente en el diseño de ingeniería civil. Varios criterios se han definido para estimar el nivel del daño de las estructuras [Hanganu et.al 2002]; algunos de ellos se definen para el comportamiento global de la estructura, otros se pueden aplicar a los miembros o partes individuales de la estructura. El índice de daño de este trabajo se basa en una analogía con el problema a nivel constitutivo. Una medida del nivel del daño de un punto material se puede obtener como el cociente entre la tensión real existente y su contraparte elástica (no dañada). Siguiendo esta idea, es posible definir el índice de daño variable como sigue

$$\sum_{i=1}^3 |P_{1i}^m| = (1 - \check{D}) \sum_{i=1}^3 |P_{1i0}^m| = (1 - \check{D}) \sum_{i=1}^3 |(\mathbf{C}^m \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_n)_i|$$

$$\check{D} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^3 |P_{1i}^m|}{\sum_{i=1}^3 |P_{1i0}^m|} \quad (25)$$

donde  $|P_{1i}^m|$  y  $|P_{1i0}^m|$  son los valores absolutos de los componentes de los vectores existentes y elásticos de la tensión, respectivamente. Es interesante observar que  $D$  considera cualquier clase de la degradación de la rigidez (daño, plasticidad, etc.) a nivel de punto material por medio de la regla de mezclas y, por lo tanto, constituye una medida de la capacidad de carga remanente. Inicialmente, para niveles bajos de carga, el material sigue siendo elástico y  $D=0$ , pero cuando toda la energía de fractura del material ha sido disipada  $|P_{1i}^m| \rightarrow 0$  y, por lo tanto,  $D \rightarrow 1$ . La ecuación (25) se puede ampliar para considerar los elementos o aún toda la estructura por medio de integrar las tensiones sobre un volumen finito de la estructura. De esta manera, los índices locales y globales de daño se definen como sigue:

$$\check{D} = 1 - \frac{\int_{V_p} \left( \sum_i |P_{1i}^m| \right) dV_p}{\int_{V_p} \left( \sum_i |P_{1i0}^m| \right) dV_p} \quad (26)$$

donde  $V_p$  es el volumen de la parte de la estructura. Por un lado, el índice de daño local / global definido en la ecuación (26) es un criterio basado fuerza, que puede discriminar el nivel del daño asignado a un sistema de elementos o a la estructura entera, según la manera en la cual él se carga, de la misma manera que se ha explicado en [Hanganu et.al. 2002]. Por otro lado, la implementación de este índice en un código estándar de FEM es muy simple desde el punto de vista computacional, sin requerir almacenaje adicional en la memoria o cálculos muy consumidores de tiempo.

## Ejemplos numéricos

### Objetividad de la respuesta de una viga cantilever de hormigón armado

La viga cantilever de la Figura 4 se utiliza para estudiar si regularizando la energía disipada a nivel constitutivo es posible obtener una respuesta independiente del de la malla de elementos finitos al incluir materiales con ablandamiento.

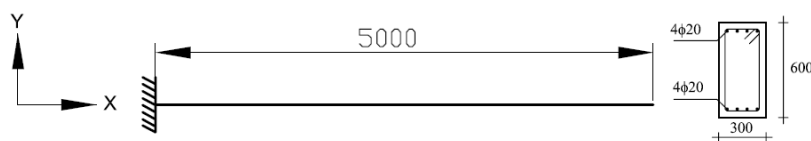


Figura 4. Viga cantilever de hormigón armado.

Cuarenta incrementos de desplazamientos impuestos fueron aplicados en la dirección de Y para obtener la curva de la capacidad de la viga. Cuatro mallas de 10, 20 40 y 80 elementos cuadráticos con la regla de integración de Gauss gobiernan fueron considerados en las simulaciones. La sección transversal de la viga fue discretizada en 20 capas igualmente espaciadas. Las barras de acero eran incluidas como parte de un material compuesto con una fracción volumétrica que correspondía a su área contribuyente al área total de la capa donde. Las características mecánicas del concreto y del acero se resumen en la tabla 4, donde  $E$  y  $\nu$  son el módulo elástico y el coeficiente de Poisson, respectivamente.  $G_f$  es la energía de la fractura,  $f_c$  es el límite último en compresión y  $n$  es el cociente de compresión/tracción.

Tabla 1. Propiedades mecánicas.

Mechanical Properties					
	$E$	$\nu$	$f_c$	$n$	$G_f$
	Mpa	Mpa	Mpa		Nmm <sup>-2</sup>
Concrete	21000	0.20	25	8	1
Steel	200000	0.15	500	1	500

La Figura 5 muestra la curva de la capacidad que relaciona la reacción vertical con el desplazamiento del extremo libre. Es posible ver que las respuestas numéricas convergen a ésta que corresponde al modelo con el mayor número de elementos.

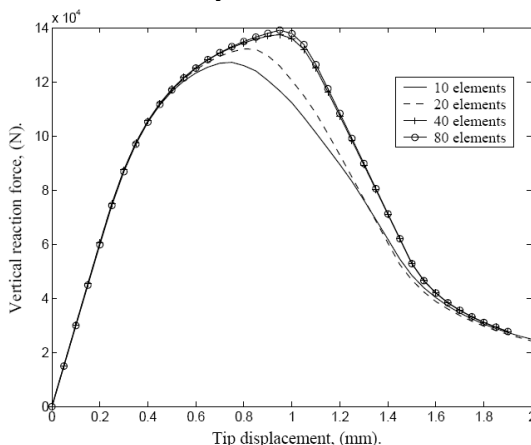


Figura 5. Curvas de capacidad.

Información adicional se puede obtener de la evolución del índice local del daños a nivel de sección, como se muestra en la Figura 6 para el las 4 mallas y los pasos de carga 10, 25 y 40. En todos los casos, la localización de la deformación ocurre en el primer elemento pero, en el caso de la malla con 10 elementos, la localización ocurre antes que en los otros casos y una redistribución peor del daño es obtenida, lo que puede explicar las diferencias observadas en la Figura 5. Finalmente, la Figura 7 muestra la evolución del índice global de daño el cual permite apreciar la respuesta independiente de la malla de la estructura.

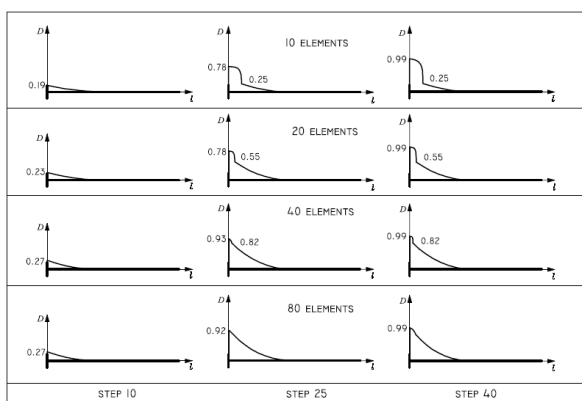


Figura 6. Evolución del índice de daño local (de sección) para las diferentes mallas de elementos finitos.

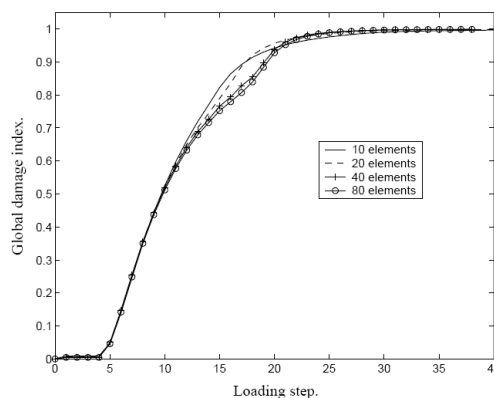


Figura 7. Evolución del índice de daño global.

## Estudio de una estructura de hormigón armado

Este ejemplo corresponde al estudio del comportamiento estático y dinámico incluyendo no linealidades geométricas y constitutivas de la estructura de la vigas que se muestra en la Figura 8. El edificio fue diseñado sísmico según el Eurocódigo 8, para el suelo firme, una aceleración de base de 0.4g y un factor de la reducción de la ductilidad de 6. La distribución de los refuerzos de acero se da en la misma figura y en la tabla 2.

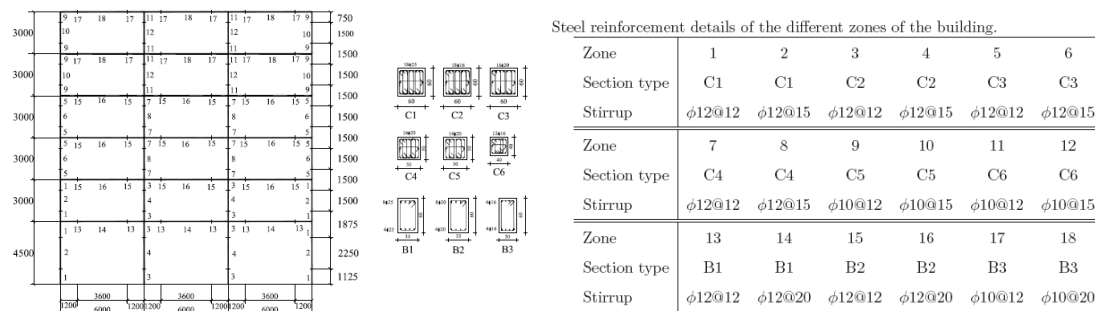


Figura 8. Modelo de la estructura de vigas.

Tabla 2. Detalle de las secciones.

Las propiedades de los materiales corresponden a un hormigón H-30 y un acero con límite de fluencia de 5100 Mpa. Por otro lado, el estudio de la evolución temporal del índice local de daño elementos estructurales proporciona la información relevante sobre las zonas estructurales en donde se concentra la demanda de la ductilidad y la disipación de energía.

La figura 9a muestra la evolución del índice local del daños para el caso estático cuando se aplica una carga lateral distribuida de acuerdo a la masa sísmica de la estructura. Es posible ver que el comportamiento no lineal está concentrado principalmente en los elementos de viga de los primeros tres pisos y en las columnas bajas. Esto concuerda con las pautas del diseño incluidas en la mayoría de los códigos sísmicos modernos, es decir, el edificio fue diseñado con vigas débiles y columnas fuertes que disipan la energía sin afectar la estabilidad global de la estructura. Por otra parte, la concentración del daño en la base de las columnas indica que estos miembros deben recibir refuerzos adicionales para permitir grandes incursiones inelásticas sin faltas frágiles. Los diagramas del daños de la figura 8b muestran la evolución del índice local de daño en el caso dinámico para una aceleración de base sinusoidal de 0.3g con una frecuencia cercana al periodo fundamental de la estructura. Es posible ver que los mecanismos de la falta son similares a los del caso estático con disipación de energía concentrada en las vigas y en la base de las columnas.

## Conclusiones

En este trabajo una formulación geométrica exacta para vigas inicialmente curvas se ha ampliado para considerar distribuciones arbitrarias de materiales compuestos en las secciones transversales en el caso dinámico. Se lleva a cabo la linealización de la forma débil de las ecuaciones del balance considerando la no linealidad constitutiva lo que conduce a la deducción las componentes inerciales, geométricas y materiales de la rigidez tangente. El modelo discreto resultante se implementa en un código de ordenador basado en el método de los elementos finitos usando un esquema iterativo del tipo Newton-Rapson.

Debido al hecho de que la deformación y sus variables dinámicas relacionadas están contenidas en una variedad diferencial y no en un espacio lineal, una versión apropiada del esquema de Newmark se utiliza para el proceso de actualización de las variables cinemáticas.

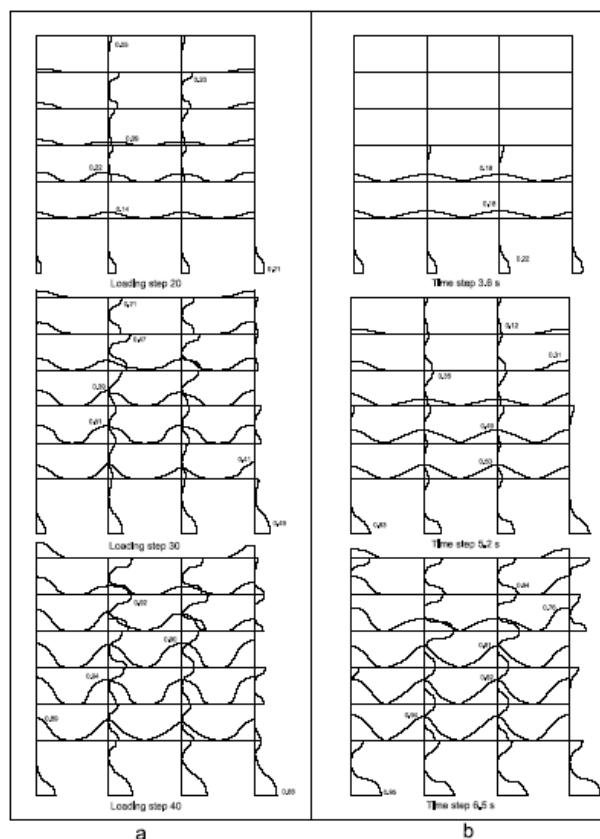


Figura 8. (a) Evolución del daño Modelo de la estructura de vigas.

Cada punto de la sección transversal puede estar compuesto de varios materiales simples con sus propias leyes constitutivas. La regla de mezclas simple se utiliza para describir el comportamiento del compuesto resultante. Los modelos constitutivos están basados en los principios de la termodinámica, lo que permite el obtener de valoraciones más realistas de la disipación de energía. Una respuesta independiente de la malla se obtiene por medio de la regularización de la energía disipada a nivel constitutivo considerando la longitud característica de los elementos y la energía de fractura del material.

Desde el punto de vista numérico, las secciones transversales están discretizadas en una rejilla de cuadriláteros, cada uno de ellos corresponde a una fibra dirigidas a lo largo del eje de la viga. Un lazo adicional de integración se requiere en cada punto de integración para obtener las fuerzas, momentos y tensores tangenciales de la sección. Se han desarrollado índices locales y globales de daño basaron en el cociente entre las tensiones elásticas y no lineales. Los índices propuestos de daño permiten estimar la evolución de la capacidad de carga global de la estructura y el estado de daño de los diversos miembros estructurales durante las acciones estáticas o dinámicas, de acuerdo a lo que se presenta en dos ejemplos numéricos.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por: La Universidad de Chile, proyecto FONDECYT n° 1970732; el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España, Proyecto: "Numerical simulation of the seismic behavior of structures with energy dissipation systems", Contract n°: BIA2003 - 08700 - C03 - 02; Y el proyecto de la comisión europea: Integrated R&D Project of the EC "LessLoss-Risk Mitigation for Earthquakes and Landslides" funded by

the European Commission, Directorate General of Research under the Contract nº GOCE-CT-2003-505448.

### Referencias:

- Barbat A. H, Oller S, Oñate E and Hanganu A. (1997). *Viscous damage model for Timoshenko beam structures*. International Journal of Solids and Structures. Vol. 34. Nº 30. pp. 3953—3976.
- Car J, Oller. S and Oñate E. (2000). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. International Center for Numerical Methods in Engineering, CIMNE, Barcelona, Spain. PhD Thesis. (In Spanish).
- Davenne L, Ragueneau F, Mazars J and Ibrahimbegovic. A. (2003). *Efficient approaches to finite element analysis in earthquake engineering*. Computers & Structures 81, 1223—1239.
- A.D. Hanganu, E. Oñate, A.H. Barbat, Finite element methodology for local/global damage evaluation in civil engineering structures, Computers and Structures. 80 (2002) 1667—1687.
- Hanganu Alex D., Oñate E. and Barbat A.H. (2002). A finite element methodology for local/global damage evaluation in civil engineering structures. Computers & Structures 80, 1667—1687.
- Ibrahimbegovic. A. (1995). On the finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 122, 11-26.
- Makinen J. (2001). *Critical Study of Newmark scheme on manifold of finite rotations*. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering. 191, 817—828.
- Mata A. P, Barbat A and Oller S. (2004). *Improvement of the seismic behavior of precast concrete structures by means of energy dissipating devices*. Third European Conference on Structural Control, 3ECSC. 12-15 July, Vienna University of Technology, Vienna, Austria.
- Mata A. P, Oller. S and Barbat A. (2005). *Numerical tool for nonlinear seismic analysis of buildings with energy dissipating systems*. 9<sup>th</sup> World Seminar on Seismic Isolation, Energy Dissipation and Active Vibration Control of Structures, Kobe, Japan, June 13-16.
- Mata P., Boroschek R., Barbat A.H. and Oller S. (2006). *High damping rubber model for energy dissipating devices*. Journal of Earthquake Engineering, JEE, (accepted for publication).
- Pampanin S. (2003). *Alternative design philosophies and seismic response of precast concrete buildings*. Fib. News. Structural Concrete, 4, Nº 4.
- Simo. J.C, and Vu–Quoc L. (1985). *A finite strain beam formulation, Part I*. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering. 49, 55–70
- Simo. J.C, and Vu–Quoc L. (1986). *A three dimensional finite strain rod model, Part II: Computational aspects*. Computational Methods in Applied Engineering. 58, 79–116.
- Simo. J.C, and Vu–Quoc L. (1988). *On the dynamic in space of rods undergoing large motions—A geometrically exact approach*. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering. 66, 125–161.
- Oller S. and Barbat A.H. (2006). *Moment-curvature damage model for bridges subjected to seismic loads*. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering. (In Press).